

A boole "rendezés"

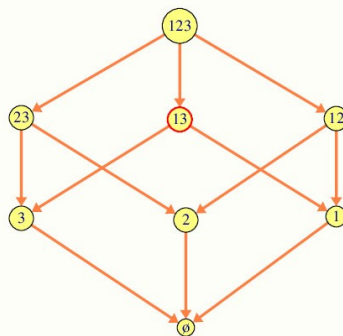
/ ludens.hu

Először (nagyon régen) "hálózattal" vagy affélével a hálós rendezések (az univerzális algebra tanárunk nevezte így) formájában találkoztam. Ilyen hálós struktúrát a részbenrendezések (reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív) hoznak létre.

Jelen esetben a véges halmazon értelmezett hálós rendezéseknek egy speciális ábrázolási formája az úgynevezett **Hasse-diagram** a téma. Ez egy olyan gráf ábrát jelent, ahol csak a (közvetlen) követési relációt ábrázolják – pontatlanul, de egyszerűen fogalmazva, ha van út, akkor egyéb közvetlen élt nem rajzolnak be. Továbbá a reflexivitásnak megfelelő hurokéleket sem rajzolják meg. Az irányítás fentről lefele értendő (vagy fordítva), így sokszor a nyilakat is elhagyják (én most ki fogom rakni).

Megjegyzés: a szövegben előfordulnak R programnyelvi hivatkozások, részletek.

1



Generált állista alapján készült - tkplot().

A hálós rendezések legismertebb fajtáját, a boole-algebrát (ami persze elemszám függvényében egy egész sereg) szemeltem ki némi vizsgálat céljára. Bár ezen a néven többnyire a műveletekkel megadott struktúrára gondolnak, de az és a rendezéssel definiált struktúra meghatározza egymást. Az alap megfeleltetési formula:

$(x \leq y) \leftrightarrow (x = x \cap y)$, így boole algebra ábrázolható (rendezés formájában) gráffal. Illetve most csak azok a boole rendezések kerülnek szóba melyeket egy véges halmaz össze részhalmaza (hatványhalmaza) generál.

Hogy munkához láthassak, szükség volt egy apró programra, ami (elvileg) tetszőleges véges elemszámú alaphalmaz esetén generálja a szükséges Hasse-diagram szerinti állistát. A programot elkészítettem R nyelven (ha valakit érdekel elküldöm a szövegét). A bemenete véges számú egy jegyű karaktereket tartalmazó vektor (az üres halmaz jele nélkül), és egy állistát ad vissza. Nyolcelemű vektornál cirka 8 percig futott – bővebb halmazok világába egyelőre nem merészkedtem. :-)

A konkrét állista nélküli (elméleti) vizsgálatoknál azonban végeztem (illetve az R) "próba" számításokat 100 elemű halmaz esetére is, a library(gmp)-t használtam.

```
> chooseZ(5,5:0)
```

```
[1] 1 5 10 10 5 1 # a Pascal-háromszögből ismerős számsor... :-)
```

Hogy mekkora számok kerülnek elő egy 100 elemű halmaz esetén jól érzékelteti a következő kép:

```
> chooseZ(100,100:0)
```

1	100	4950
161700	3921225	75287520
1192052400	16007560800	186087894300
1902231808400	17310309456440	141629804643600
1050421051106700	7110542499799200	44186942677323600
253338471349988640	1345860629046814650	6650134872937201800
30664510802988208300	132341572939212267400	535983370403809682970
2041841411062132123600	7332066885177656269200	24865270306254660391200
79776075565900368753100	242519269720337121015504	699574816500972464467800
1917353200780443050763600	4998813702034726525205100	12410847811948286545336800
29372339821610944823963760	6632463806863423796047200	143012501349174257560226775
294692427022540894366527900	580717429720889409486981450	109506715318796286461165020
1977204582144932989443770175	3420029547493938143902737600	5670048986634686922786117600
9013924030034630492834340800	13746234145802811501267369720	20116440213369968050635175200
28258808871162574166368460400	38116532895986727945334202400	49378235797073175747364762200
61448471214136179596720592960	73470998190814997343905056800	84413487283064039501507937600
93206558875049876949581681100	98913082887808032681188722800	10089134454556419334812497256
98913082887808032681188722800	93206558875049876949581681100	84413487283064039501507937600
73470998190814997343905056800	61448471214136179596720592960	49378235797073175747364762200
38116532895986727945334202400	28258808871162574166368460400	20116440213369968050635175200
13746234145802811501267369720	9013924030034630492834340800	5670048986634686922786117600
3420029547493938143902737600	1977204582144932989443770175	109506715318796286461165020
580717429720889409486981450	294692427022540894366527900	143012501349174257560226775
6632463806863423796047200	29372339821610944823963760	12410847811948286545336800
4998813702034726525205100	1917353200780443050763600	699574816500972464467800
242519269720337121015504	79776075565900368753100	24865270306254660391200
7332066885177656269200	2041841411062132123600	535983370403809682970
132341572939212267400	30664510802988208300	6650134872937201800
1345860629046814650	253338471349988640	44186942677323600
7110542499799200	1050421051106700	141629804643600
17310309456440	1902231808400	186087894300
16007560800	1192052400	75287520
3921225	161700	4950
100	1	

Kezdjük az elméleti vizsgálattal.

Legyen H egy véges n elemű halmaz (n természetes szám, és az egyszerűség kedvéért $1 < n$, pl. $n=5$). Képezzük H összes részhalmazainak halmazát (hatványhalmaz), beleértve H -t és az üres halmazt ($\emptyset$) is.

Gondolatban rendezzük sorokba a hatványhalmaz elemeit (melyek persze maguk is halmazok – H részhalmazai), mégpedig úgy, hogy egyazon sorba kerüljenek az azonos elemszámú halmazok. Illetve egy nagyobb elemszámú halmaz sora följebb legyenek, mint egy kisebb elemszámú halmazé. Tehát a legfelső (az 1.) sorban a H található (nyilván egyedül), az alatta lévő (a 2.) sorban pedig az $n-1$ elemszámú halmazok (melyek persze mind H részhalmazai). A 3. sorban az $n-2$ elemszámú halmazok találhatók (melyek persze mind részhalmazai H -nak, DE – az egyel feljebb lévő sorban lévő – $n-1$ elemű halmazok némelyikének is). Ahogy haladunk lefelé az egyre kisebb elemszámú halmazok találhatók (melyek persze mind részhalmazai H -nak, DE az egyel föltebbi sorban lévő halmazok, sőt a korábbi halmazok némelyikének is). Az üres halmaz ($\emptyset$) minden halmaznak részhalmaza (ugyan is minden eleméről elmondható, hogy eleme egy másik halmaznak – hiszen neki egy sincsen...).

Példaként legyen $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, akkor az említett sorok a következők (első oszlopban a sor halmazainak elemszáma, másodikban a halmazok, harmadik oszlopban a sorban lévő halmazok darabszáma szerepel):

elemszám	halmaz	db szám
5	"12345"	1
4	"1234" "1235" "1245" "1345" "2345"	5
3	"123" "124" "125" "134" "135" "145" "234" "235" "245" "345"	10
2	"12" "13" "14" "15" "23" "24" "25" "34" "35" "45"	10
1	"1" "2" "3" "4" "5"	5
0	$\emptyset$	1

Számoljuk össze általában (persze figyelemmel a fenti példára is) a Hasse-diagram szerinti **"kimenő"** éleket – nyilak most csökkenő elemszám irányába mutatnak (a nyíl vége a kisebb jel... :-)). A fenti példában pl. az "12345" halmazból 5 db nyíl indul ki, a "135"-ből pedig 3 db.

Megjegyzés: Egy n elemű halmaz k elemű ($k \leq n$ és természetes számok) részhalmazainak a számát az $\binom{n}{k}$ kifejezéssel szokás jelölni, tehát a fenti példa lapján $\binom{5}{3} = 10$.

Az n elemű esetre koncentrálni legyen a szóban lévő táblázat két egymást követő sora K , illetve L (az egyszerűség kedvéért gondoljuk azt, hogy a K sor a táblázat középső traktusába esik). Jelölje továbbá a K sorban lévő halmazok elemszámát k (következésképpen az L sorban lévő halmazok elemszáma pedig $k-1$).

Hány halmaz van a K sorban?

A fenti jelölést használva, a K sorban $\binom{n}{k}$ darab halmaz szerepel – az L -ben természetesen $\binom{n}{k-1}$.

Hány él indul ki a K sor valamelyik halmazából?

Mindegyik halmazból éppen a saját egyel kevesebb elemszámú részhalmazaiba kell élt húzni (melyek az L sorban szerepelnek), abból pedig $\binom{k}{k-1}$ darab van – a k elemből minden lehetséges módon elhagyunk egyet, de ez akkor éppen annyi mint $\binom{k}{1}$, ami pedig nyilván k (pl. 4 elemű halmaznak 4 darab egyelemű részhalmaza van, és ennyi a három elemű részhalmazainak száma is).

Megjegyzés: Igaz, hogy egy a K sorban lévő halmaz (legyen V) bármely egyel kevesebb elemszámú részhalmaza más ugyancsak a K sorban lévő halmaz részhalmazaként is megjelenik, de ez a V -ből behúzendó él számát nem növeli. Továbbá az üres halmaz ($\emptyset$) kimenő éleinek a száma nyilván nulla.

Következésképpen, a K sorban szereplő minden halmazból ugyan annyi, konkrétan k darab élt szükséges húzni az L sor megfelelő halmazaihoz (fontos, hogy k a K sor halmazainak elemszámát jelöli eredendően).

Ez azt jelenti, hogy egy sor halmazainak elemszáma (a fenti táblázatban az első oszlop) éppen a sor halmazainak **kimenő fokszáma**, az illető sorban lévő halmazok darabszáma (a fenti táblázatban a

harmadik oszlop), pedig éppen az aktuális fokszám **gyakorisága**. Azaz az 1,3. oszlopok a gyakorisági táblát alkotják – általában is és a fenti táblázatban is.

A harmadik oszlopban az illető sorban lévő halmazok darabszáma szerepel, a K sor esetén – mint láttuk

– ez $\binom{n}{k}$, ahol $k:n...0$, avagy $k:0...n$. Ezek összege: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, éppen a H halmaz összes

részhalmazainak a száma (beleértve az üres halmaz is). Mely viszont (ekvivalens lévén egy kételemű halmaz ismétléses variációinak számával) egyenlő a 2^n értékével.

Tehát ha gyakoriságokat, illetve az összegüket elosztjuk 2^n -el, akkor egy szabályos eloszlást kapunk (a relatívgyakoriságok/valószínűségek összege 1). Ami pedig éppen megegyezik a $p=0,5$ paraméterű binomiális eloszlással ($0,5^n = 1/(2^n)$):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 0,5^n = 0,5^n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Vizsgáljuk most a **bemenő** fokszámokat. A bemenő élek összessége megegyezik a kimenő élek összességével, azonban egy halmaz (csúcs) esetén a kimenők és bejövők nem azonosak...

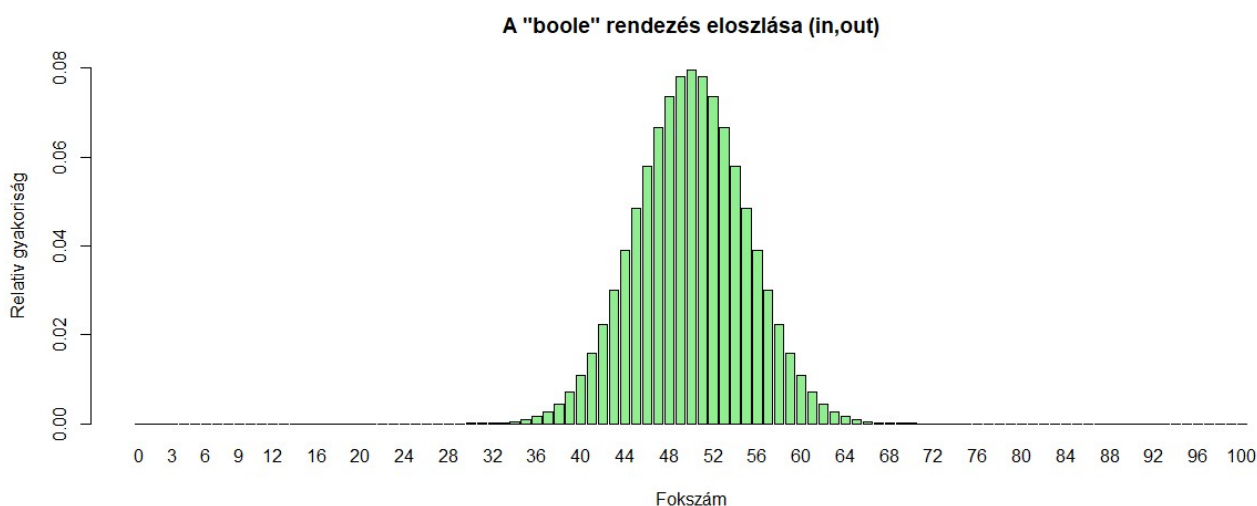
Tekintsük ismét a K jelű sort, melyben szereplő halmazok elemszáma k. Válasszunk ki innen egy halmazt, legyen a neve V. Nos, V elemeinek száma k, az előtte lévő sor (legyen J) bizonyos halmazaiból érkezik V-hez él. A J-ben lévő halmazok elemszáma nyilván $k+1$, azaz J olyan halmazaiból érkezik V-hez él, melyek egyetlen elemmel bővebbek V-nél, és ez az elem éppen olyan elem lehet mely nem eleme V-nek és eleme az n elemű H-nak (alaphalmaz). Tehát éppen $n-k$ elem megfelelő, azaz V-be $n-k$ él érkezik.

Hogy is van ez? Azt kaptuk, hogy ezen háló minden elemére igaz: ha k kimenő éle van, akkor $n-k$ bejövő éle, azaz minden csúcsnak $k+(n-k)=n$ az összfokszáma (kimenő+bejövő).

Ez a kimenő és bejövő élek eloszlásának tökéletes szimmetriáját jelenti. Továbbá ezen eredmény alapján egyszerűen kaphatunk képletet az összes élek számára. Ugyan is minden csomópont tekintetében az összfokszám n, a csúcsok száma 2^n , ha ezeket összeszorozzuk, akkor minden élt kétszer vettünk figyelembe, tehát összes élek száma: $n \cdot 2^{n-1}$, pl. a fenti példa esetén: $5 \cdot 2^4 = 80$.

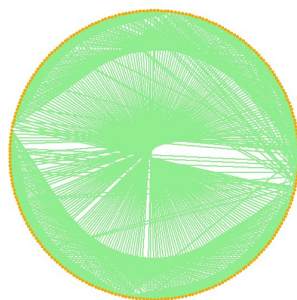
Összegezve, a kimenő és a bejövő fokszámok eloszlása binomiális, az összfokszám eloszlása pedig konstans.

Íme a 100 elemű halmaz boole rendezésének kimenő (vagy bejövő) fokszám eloszlása (relatív gyakoriságok):



Most pedig a generált éllista alapján néhány diagram a 8 elemű alaphalmaz esetére (256 csúcs, 1024 él).

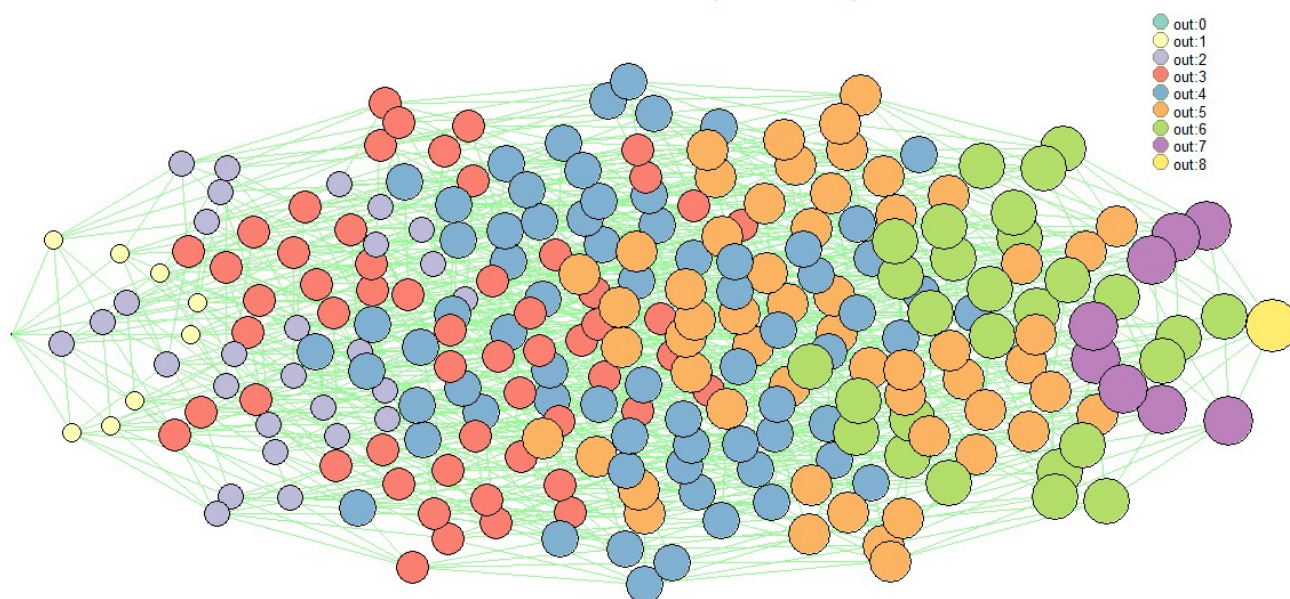
A szem



A csúcsok színei és mérete is kimenő fokszám szerint beállítva (lásd a jelmagyarázatot). Jól látható a 8-as fokszámú alaphalmaz a jobb szélén (a sötétlilákkal körülfogva) és az alig látható üres halmaz a balszélén (kis sárgákkal körülfogva), a középtájon a balról jobb felé folyamatosan növekvő többiek szín kavalkádja.

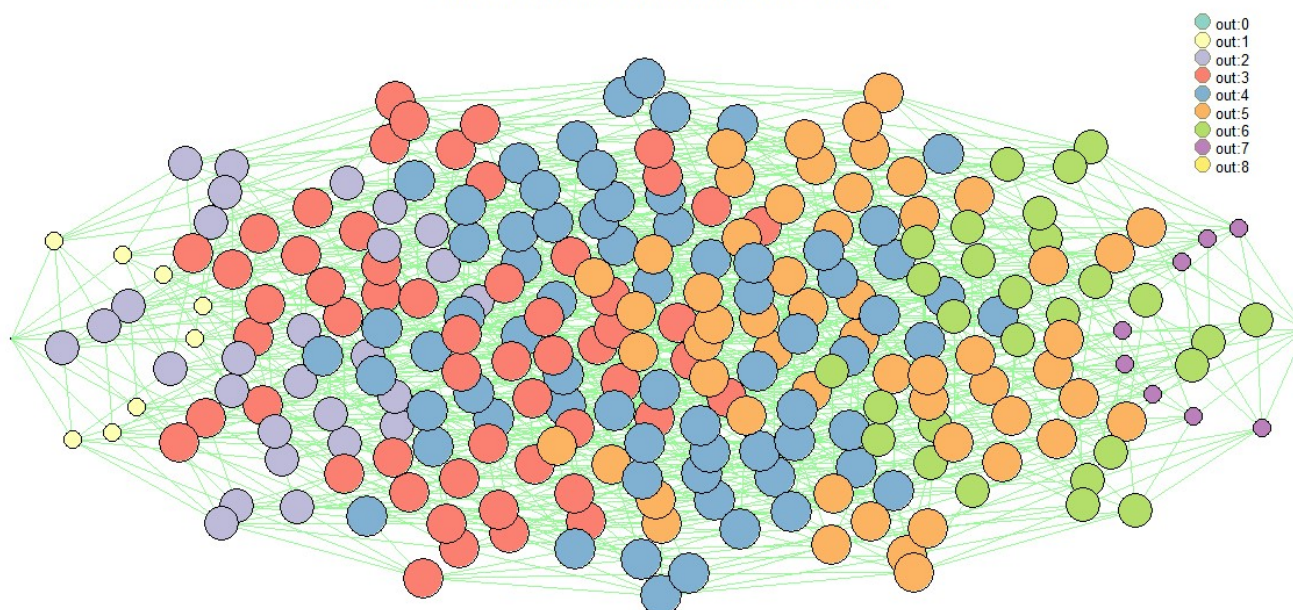
4

Bool8 "rendezés" hálózata ("out" szerint)



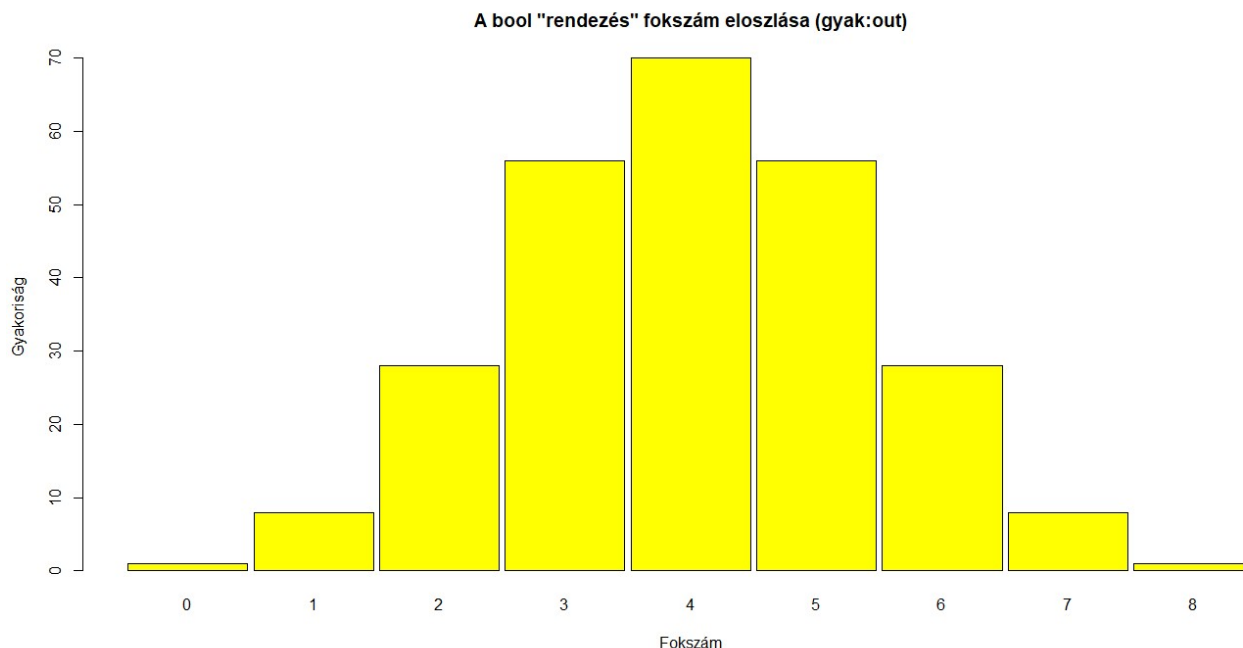
A következő diagramon a csúcsok mérete a **betweenness** szerint van beállítva, a színük pedig a kimenő fokszám szerint. A diagram jól szemlélteti, hogy betweenness szerint mind az alaphalmaz, mind az üres halmaz aprócska, és közép felé növekednek a csúcsok méretei – a színek mutatják a fokszámokat.

Bool8 "rendezés" hálózata ("betw" szerint)

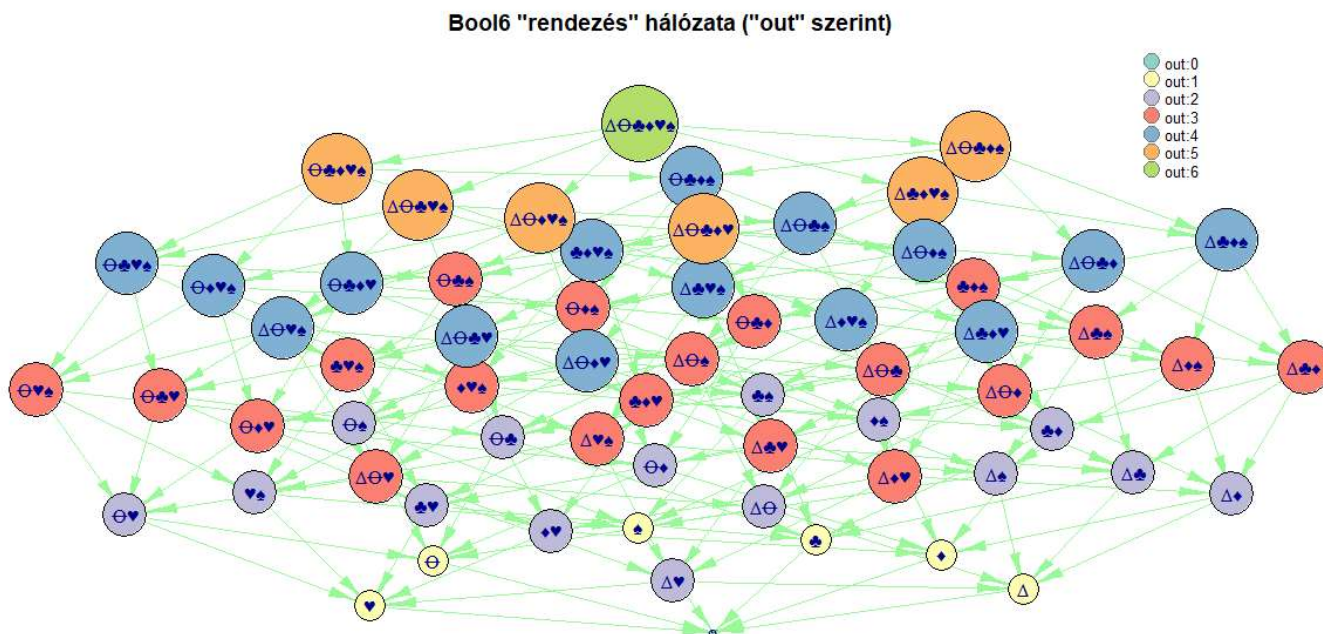


Ez a diagram a generált (8 elemű alaphalmazra alapozott) gráf alapján számolt (gyakorlati) kimenő fokszám eloszlást mutatja – nyilván megegyezik az elméleti diagrammal.

5



Ráadásnak egy 6 elemre alapozott boole háló, a csúcsok mérete és színe is kimenő fokszámtól függő. Itt látszanak a nyilak is, bár itt-ott igen nehéz kinézni, hogyan is haladnak az élek – de helyesen. :-)



Örömmre szolgált, ez a feladat – nem kevés időt igényelt, de szórakoztató és hasznos is volt. Külön örülök, hogy megvalósítottam a boole hálóval kapcsolatos (apró) tervemet. Úgy gondolom, jó szolgálatot tehetnek ezek a generálható reguláris gráfok a gráfábrázolás, paraméterhasználat... gyakorlása tekintetében.